Ασκ. 4)

α) $R^2 = r^2_{x,y}$. β) $r^2_{y,\hat{y}} = r^2_{x,y}$

$$R^2 = \frac{SS_{res}}{SS_{tot}} = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} =$$

$$= \frac{\sum(\bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} + \hat{\beta}_1 x_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum(x_i - \bar{x})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} \quad (1)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \quad \text{ενώ} \quad r_{x,y} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2}}$$

Επομένως

$$\hat{\beta}_1 = \left[\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right]^{1/2} r_{xy}.$$

Από (1), (2). $R^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} r^2_{xy} = r^2_{x,y}$.

β)

$$r_{y,\hat{y}} = \frac{\sum(y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})}{\sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2}\sqrt{\sum(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2}}$$

$$\bar{\hat{y}} = \frac{1}{n}\sum \hat{y}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) =$$

$$= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\bar{x} = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} + \hat{\beta}_1\bar{x} = \bar{y}$$

$$\sum(y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}) = \sum(y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{y}) =$$

$$= \sum(y_i - \bar{y})(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i - \bar{y}) = \sum(y_i - \bar{y})(\bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} + \hat{\beta}_1 x_i - \bar{y}) =$$

$$= \hat{\beta}_1 \sum(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}).$$

$$r^2_{Y,\hat{Y}} = \frac{\left[\sum(Y_i-\bar{Y})(\hat{Y}_i-\bar{\hat{Y}})\right]^2}{\sum(Y_i-\bar{Y})^2\sum(\hat{Y}_i-\bar{\hat{Y}})^2} = \frac{b_1^2\left[\sum(Y_i-\bar{Y})(X_i-\bar{X})\right]^2}{\sum(Y_i-\bar{Y})^2\sum(\hat{Y}_i-\bar{\hat{Y}})^2} =$$

$$= \frac{b_1^2\left[\sum(Y_i-\bar{Y})(X_i-\bar{X})\right]^2}{\sum(Y_i-\bar{Y})^2 SSreg} = \frac{b_1^2\left[\sum(Y_i-\bar{Y})(X_i-\bar{X})\right]^2}{\sum(Y_i-\bar{Y})^2 b_1^2\sum(X_i-\bar{X})^2} =$$

$$\frac{\left[\sum(Y_i-\bar{Y})(X_i-\bar{X})\right]^2}{\sum(Y_i-\bar{Y})^2\sum(X_i-\bar{X})^2} = (r_{X,Y})^2.$$

$\boxed{\text{Ασκ. 7 (φυλλάδιο).}}$

Δίνεται $\left.\begin{matrix} E(Y_1)=\theta \\ E(Y_2)=2\theta \end{matrix}\right\}$ $E\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix}E(Y_1)\\E(Y_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\theta\\2\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\theta.$

Θεωρώ το γραμμικό μοντέλο $\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{\varepsilon}$ τ.ω

$Y = \begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\underset{\sim}{b} = \theta$ $\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\end{pmatrix}$ με $E(\varepsilon_i)=0$

Από το γενικό γραμμικό μοντέλο ή πολλαπλής παλινδρόμησης.
ΕΕΤ $\hat{\underset{\sim}{b}} = (X'X)^{-1}X'\underline{Y}.$

Άρα ο ΕΕΤ της θ είναι

$$\hat{\theta} = \left((1,2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)^{-1}\cdot(1,2)\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}(Y_1+2Y_2)$$

$$SSres = \underset{\sim}{Y}^T\cdot\underset{\sim}{Y} - \hat{\underset{\sim}{b}}^T\cdot X^T\cdot\underset{\sim}{Y} =$$

$$= (Y_1,Y_2)\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix} - \frac{1}{5}(Y_1+2Y_2)(1,2)\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix} =$$

$$= Y_1^2+Y_2^2-\frac{1}{5}(Y_1+2Y_2)^2$$

Στο μάθημα αυτό για τους ΕΕΤ. δεν χρειαζόμαστε γνώση της κατανομής αλλά ένα μοντέλο.

Ασκ. 9 | Ν.Δ.Ο αν σε ένα γραμμικό μοντέλο υπάρχει σταθερός όρος. $\sum \varepsilon_i = \sum (Y_i - \hat{Y}_i) = 0$

σταθερός όρος.

π.χ. $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon_i$

Οι κανονικές εξισώσεις είναι $X^T \cdot X \cdot \underline{\beta} = X^T \cdot \underline{Y}$ και ικανοποιούνται στο $\hat{\beta}$, αφού ο ΕΕΤ είναι λύσεις των κανονικών εξισώσεων.

$$X^T X \hat{\underline{\beta}} = X^T \cdot \underline{Y} \Rightarrow X^T \underline{Y} - X^T X \hat{\underline{\beta}} = \underline{0} \Rightarrow X^T (\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow X^T (\underline{Y} - \hat{\underline{Y}}) = 0 \Rightarrow (\underline{Y} - \hat{\underline{Y}})^T X = \underline{0}$$

$$\Rightarrow (Y_1 - \hat{Y}_1, \ldots, Y_n - \hat{Y}_n) \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{np} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

εφόσον έχει σταθερό όρο

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i) = 0$ (από το γινόμενο με την πρώτη στήλη.

Ασκ. 10 / φυλλάδιο

$\underset{\sim}{Y} = X \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$ Rank$(X) = p+1$

α) Από προηγούμενη άσκηση

$(Y-\hat{Y})^T X = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow (Y-\hat{Y})^T X \hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (Y-\hat{Y})^T \hat{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \sum (Y_i - \hat{Y}_i)\hat{Y}_i = 0$

Άρα το $\hat{\underset{\sim}{Y}} \perp \underset{\sim}{\varepsilon}$

β) $\underline{\hat{Y}} = X\underline{\hat{\beta}}$

$Var(\underline{\hat{Y}}) = Var(X\underline{\hat{\beta}}) = X Var(\hat{\beta}) X^T = X(\sigma^2(X^T X^{-1}) X^T =$

$= \sigma^2 X(X^T X)^{-1} X^T.$

$\sum Var(\hat{Y}_i)$ είναι το ίχνος του $Var(\hat{Y})$

$\sum Var(\hat{Y}_i) = tr[Var(\underline{\hat{Y}})] = tr(\sigma^2 X(X^T X)^{-1} X^T). = \sigma^2 tr(\underbrace{X}_{A}\underbrace{(X^T X)^{-1} X^T}_{B})$

Γνωρίζουμε ότι $tr(AB^T) = tr(A^T \cdot B)$ έχουμε

$\sigma^2 tr(X^T ((X^T X)^{-1} X^T)^T) =$

$= \sigma^2 tr(X^T X^{TT} ((X^T X)^{-1})^T) = \sigma^2 tr(X^T X (X^T X)^{-1} =$

$= \sigma^2 tr(I_{p+1}) = \sigma^2 (p+1).$

Ασκ. 11 / φυλλάδιο

$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i, \quad i=1,\dots n \qquad \varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ ανεξ.

Κανονικές εξισώσεις
$$\left.\begin{aligned} 10\hat\beta_0 + 2\hat\beta_1 - 6\hat\beta_2 &= 4 \\ 2\hat\beta_0 + 2\hat\beta_1 &= 6 \\ -6\hat\beta_0 + 5\hat\beta_2 &= 7 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

α) αν $n=10$ $\quad \sum y_i^2 = 107$ να υπολογιστεί $\hat\beta$ και το MSres.

β) Να κατασκευαστεί τεστ. για $H_0: \beta_1 = 2\beta_2$

α) οι ΕΕΤ $\hat\beta = (X^T X)^{-1} X^T Y$ και οι Κ.Ε είναι

$(X^T X)\hat\beta = X^T \underset{\sim}{Y} \quad (**)$

Από (**), (*) $\quad X'X = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad X'\underline{Y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 12 \\ -10 & 14 & -12 \\ 12 & -12 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\hat\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$MSres = \frac{1}{n-p-1} SSres = \frac{1}{10-2-1}\left(\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\hat\beta}' X'\underline{Y}\right) =$$

$$= \frac{1}{7}\left(107 - (8,-5,11)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = 4$$

β] $H_0: \beta_1 = 2\beta_2 \Leftrightarrow H_0: A\underset{\sim}{\beta} = c$, $A = (0,1,-2)$, $c = 0$

Α' τρόπος με χρήση του F-τεστ για έλεγχο της γενικής γενικής γραμμ. υπόθεσης.

$$F = \frac{(A\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{c})^T (A(X^TX)^{-1}A^T)^{-1}(A\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{c})}{SS_{res}} \cdot \frac{n-p-1}{q}, \quad q=1.$$

με $F \geq F_{q, n-p-1, \frac{a}{2}}$ κ.π.

Β' τρόπος

Κατασκευή t-τεστ.

$H_0: \underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{c}$, $\underset{\sim}{A}^T = (0,1,-2)$, $\underset{\sim}{c} = 0$

Θα στηριχτώ στον εκτιμητή των παραμέτρων που υπεισέρχονται στην Ho δηλ. στο $\hat\beta_1 - 2\hat\beta_2 = \underset{\sim}{A}'\hat\beta$

Θέλω την κατανομή του $\hat\beta_1 - 2\hat\beta_2 = \underset{\sim}{A}'\hat{\underset{\sim}{\beta}}$

Γνωρίζω ότι $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat\beta_1 \\ \hat\beta_2 \\ \hat\beta_3 \end{pmatrix} \sim N_3\left(\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \sigma^2(X^TX)^{-1}\right)$

Άρα $\underline{A'\hat\beta} = \hat\beta_1 - 2\hat\beta_2 \sim N\left(\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{\beta}, \; A'\sigma^2(X^TX)^{-1}A\right) =$

$= N(\beta_1 - 2\beta_2, 15{,}75\sigma^2) \Rightarrow \hat\beta_1 - 2\hat\beta_2 \sim N(0, 15{,}75\sigma^2)$ υπό την
Ho: $\beta_1 = 2\beta_2$.

$\cancel{\hat\beta_1 - 2\hat\beta_2 \sim N(\beta_1 - 2\beta_2, 10.25\sigma^2)}$ υπό την Ho:

$\hat{\beta}_1 - 2\hat{\beta}_2 \sim$ ~~$N(0, 15{,}75\sigma^2)$~~ $\sim N(0,1)$

$\sigma\sqrt{15{,}75}$

Είναι $\frac{SS_{res}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-p-1}$

$$t = \frac{\frac{\hat{\beta}_1 - 2\hat{\beta}_2}{\sigma\sqrt{15{,}75}}}{\sqrt{\frac{SS_{res}}{\sigma^2}/(n-p-1)}} \sim t_{n-p-1} \Rightarrow t = \frac{\hat{\beta}_1 - 2\hat{\beta}_2}{\sqrt{15{,}75}\sqrt{MS_{res}}} \sim t_7.$$

Η H_0 απορ. για $|t| \geq t_{7,a}$

Χρόνος καθαρής εξέτασης λιγότερο από 3 ώρες.
Χειρόγραφες απαντήσεις

3 θέματα // ξεχωριστά το ένα με το άλλο

Σε κάθε σελίδα ονοματεπώνυμο, Α.Μ.